

臺南市 2017 年公私立國民中學暨完全中學數學競賽決賽試題

注意事項：

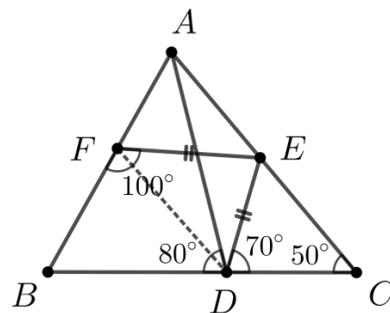
- 1、本試卷試題總計兩大類；第一類為填充題，共 8 題，每題 7 分，共 56 分；第二類為計算及證明題，共 4 大題，共 44 分。
- 2、請將答案依題號填入答案卷中；填充題只須填入最終答案，計算證明題則須詳列計算或證明過程。
- 3、試題所提供圖形僅供參考；如有根式請化為最簡根式，如有分數請化為最簡分數，否則不予計分。
- 4、請以藍筆或黑筆作答，鉛筆作答不予計分。
- 5、試題及答案卷的背面可當計算紙使用。

一、填充題

1. 已知一三角形的三邊長分別為 11, 15, k , 且 k 為整數，試問：有多少個 k 使得此三角形為鈍角三角形？

2. 已知 x, y, z 三數滿足 $x-1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$, 試問：當 $x^2 + y^2 + z^2$ 的值達到最小時， $x+y+z$ 的值為何？

3. 右圖中， D, E, F 分別是 $\triangle ABC$ 的邊 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 上的點，已知 $\overline{DE} = \overline{EF}$ ，且 $\angle ACB = 50^\circ, \angle EDC = 70^\circ, \angle BFE = 100^\circ, \angle ADB = 80^\circ$ 。
試問： $\angle ADF$ 是多少度？

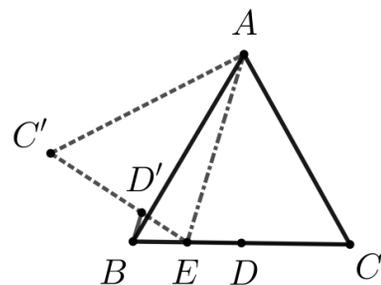


4. 已知 a, b, c, k 四數滿足 $a^2 + b - k = 0, b^2 + 2c + k = 0, c^2 + 3a + \frac{7}{2} = 0$, 求 $a+b+c$ 的值。

5. 若一個數列中每一項皆取自 1, 2, 3, 4, 5, 6 這六個整數，例如：2, 3, 1, 5, 則稱它為一個「骰子點數列」。若數列的項數沒有限制且數字可被重複選取，則數列和為 6 的「骰子點數列」總共有多少個？（注意：數字的順序不同就視為不同的數列，例如：數列 2, 3 及 3, 2 須看成不同的數列）

6. 設 a, b, c 為正整數且滿足 $a+b+c=11$. 求 $abc+ab+bc+ca$ 的最大值。

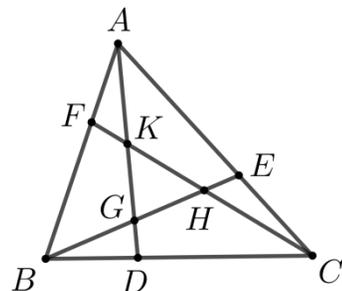
7. 如右圖， $\triangle ABC$ 是邊長為 1 的正三角形，點 D 為 \overline{BC} 的中點，點 E 為 \overline{BD} 的中點。沿 AE 對折後，點 C, D 分別移動至 C', D' 的位置上。求 $\overline{BD'}$ 的長度。



8. 設正整數 p, q, r 為相異質數，且 $106 = p + qr$. 求 $p+q+r$ 的最大值。

二、計算證明題

1. (10分) 右圖中， D, E, F 分別為 $\triangle ABC$ 邊上的點，且 $\overline{BD} = \frac{1}{3}\overline{BC}, \overline{CE} = \frac{1}{3}\overline{CA}, \overline{AF} = \frac{1}{3}\overline{AB}$, 而 $\triangle GHK$ 是由 $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ 所圍成，那麼 $\triangle GHK$ 與 $\triangle ABC$ 的面積比值為何？



2. (10分) 證明不等式

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+2017} < 2$$

成立。

3. (12分) 試找出所有正整數 p 使得 p 是質數且 $3p+1$ 是完全平方數。詳細說明你的理由！

4. (12分) 已知一個等差數列的首項為 12、第 m 項是 2 的某正整數次方，且第 1 項至第 m 項的總和是 2^7 . 求 m 的值。