

臺南市 107 年公私立國民中學數學競賽決賽試題

注意事項：

1. 本試題有兩頁，總分為 100 分，共兩大題；第一大題為填充題共 10 題每題 6 分，合計 60 分；第二大題為計算證明題共 4 題，每題配分標註於題目後，合計 40 分。
2. 請將答案以藍筆或黑筆書寫於答案本內標示的位置作答。
3. 以鉛筆作答，或未按答案本標示題號作答者該題以 0 分計算。

第一大題：填充題

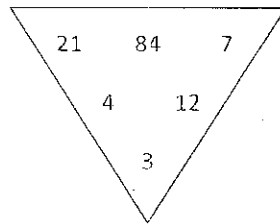
1. 計算 $\frac{201820190}{20182019^2 - 20182018 \times 20182020}$ 的值為_____。
2. 計算 $\frac{(2 \times 7 + 6) \times (4 \times 9 + 6) \times (6 \times 11 + 6) \times \cdots \times (2014 \times 2019 + 6) \times (2016 \times 2021 + 6) \times (2018 \times 2023 + 6)}{(1 \times 6 + 6) \times (3 \times 8 + 6) \times (5 \times 10 + 6) \times \cdots \times (2013 \times 2018 + 6) \times (2015 \times 2020 + 6) \times (2017 \times 2022 + 6)}$ 的值為_____。(需化至最簡分數)
3. 已知 $a = \sqrt{5}$ ，化簡式子 $\frac{(a+1)^2 - 4a + 3}{\sqrt{a^2 - 8a + 16}} \div \left(\frac{a^2 - 2a + 4}{a^2 - 5a + 4} \right) \times \left(\frac{1}{a+2} \right) - \left(\frac{a^2 - 2a}{4 - a^2} \right) =$ _____。(需化為最簡式)
4. 有一個六位數，其前三位數字與後三位數字完全相同，順序也完全相同，則此六位數除以 1001 得餘數為_____。
5. 從 100 到 999 的所有三位數中，滿足百位數字加上十位數字再加個位數字總和為 25 的所有三位數其總和為_____。
6. 假設直角 $\triangle ABC$ 的兩股 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 長度的和為 a ，點 M 是斜邊 $\overline{AB}$ 的中點，且 $\overline{MA} = \overline{MB} = 5$ 。若 a 為正整數，則滿足上述條件的所有 a 值之和為_____。
7. 已知 x 為整數， p 為正質數，且滿足 $6x^2 - 7x = p^2 + 5$ ，則 p 的值為_____。
8. 有一個 n 位數 A ，具備以下兩個性質：
(1) A 中每一位數的數字都是 1 或 2，
(2) A 中至少有相鄰的二個數字都是 1，
例如： $n=3$ ， A 的所有可能值有 112、211 及 111 都滿足此二性質。
另一個 m 位數 B ，具備以下兩個性質：
(1) B 中每一位數都是 0 或 1，
(2) B 中至少有相鄰的二個數字都是 0，
例如： $m=3$ ， B 只有 100 滿足此二性質。
若 a_n 表示 n 位數 A 的個數， b_m 表示 m 位數 B 的個數，則 $a_1 + b_4$ 之值為_____。
9. 已知 α, β, γ 均為正整數且滿足 $\frac{7^{\alpha+\beta} + 7^{\beta+\gamma} + 7^{\gamma+\alpha}}{49^\alpha + 49^\beta + 49^\gamma} = 1$ ，則 $3\alpha - 5\beta + 2\gamma$ 的值為_____。



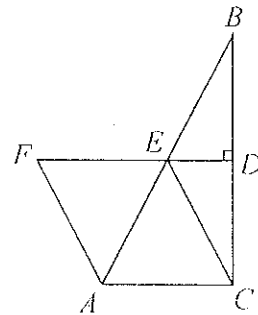
10. 若正整數 a, b, c 滿足 $ab + bc = 44$ 和 $ac + bc = 23$ ，則 $a - b + c$ 所有可能的值為 _____。

第二大題：計算證明及作圖題

1. 我們稱一個「 n 階魔術三角形數」是由一些相異正整數作下列方式排列：將每一列任意相鄰二數中較大的數能被較小的數所整除，且商放在下一列，例如下圖表示邊長為 3 的三階魔術三角形數的其中一個例子。在這個例子中第一列的數分別為 21、84、7，最大的數為 84，第二列的數分別為 4、12，最大的數為 12，第三列的數為 3，最大的數就是 3；在每一列的最大數 84、12、3 中最小的值為 3。試問，在所有可能的四階魔術三角形數中每一列的最大數中，最小的值是多少？請完整寫出計算過程。（12 分）



2. 已知長方形 A 的長為 m ，寬為 n ，試問是否存在一個長方形 B ，使它與長方形 A 的周長比值和面積比值都等於 19？請完整說明理由。（12 分）
3. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{BC}$ 的垂直平分線 $\overline{DE}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點，交 $\overline{AB}$ 於 E 點，點 F 在 $\overline{DE}$ 上與 D 點分別位於 E 點的兩側，且 $\overline{AF} = \overline{CE}$ 。
- (1) 求證：四邊形 $ACEF$ 是平行四邊形。（4 分）
 - (2) 當 $\angle ABC$ 的角度等於多少時，四邊形 $ACEF$ 是菱形？請回答並證明你的答案。（2 分）
 - (3) 承(2)，當 $\overline{BC} = 2$ 時，由線段 $\overline{AC}$ 、線段 $\overline{CB}$ 、線段 $\overline{BE}$ 、線段 $\overline{EF}$ 及線段 $\overline{FA}$ 所圍成的多邊形面積為多少？（2 分）



4. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，且 $\overline{AC} = \overline{BC}$ ， D 、 E 為 $\overline{AB}$ 上的二點，使得 $\angle DCE = 45^\circ$ ，

試證： $\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BE}^2$ 。（8 分）

