

臺南市 107 年公私立國民中學數學競賽複賽試題

注意事項：

本試卷共有 22 題，分為兩大題。第一大題（共 10 題，第 1 到第 10 題，每題 4 分，共 40 分）；第二大題（共 12 題，第 11 到第 22 題，每題 5 分，共 60 分）；總分 100 分。

請各位考生從每題的四個選項中選出最合乎題意的答案。

第一大題：

1. 請問比 $\frac{1}{3}$ 大，且比 5 小，又分母是 6 的最簡分數共有幾個？

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11

2. 假設 $a > b > 0$ 且 $a^2 + b^2 = 5ab$ ，則 $\frac{a+b}{a-b}$ 的值是多少？

(A) $-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ (C) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

3. 設 k 為正整數，如果 $k < \frac{1}{\frac{1}{2017} + \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019}} < k+1$ ，則 k 的值是多少？

(A) 671 (B) 672 (C) 673 (D) 674

4. 有一種電腦遊戲稱為「猜數字」；遊戲一開始電腦會設定一組四位數，其中四個數字是從 1、2、3、4、5、6、7、8、9 這九個數字中任選四個相異的數字所組成。玩家依序輸入猜測的四位數，電腦則會針對玩家所輸入的四位數給予提示，其提示方式為：

假設電腦所設定的四位數為 5678，當玩家所輸入的四位數為 5346 此時電腦會呈現 1A1B，代表玩家所猜的四位數其中一個數字正確且位置正確（以 1A 表示），另外一個數字正確但位置不正確（以 1B 表示）。玩家依照電腦所提供的線索接著猜下一個答案直到答案正確為止。

現在有一個玩家進行遊戲，他所猜測的數字與電腦所給的提示如下：

1234	1A1B
3456	0A0B
1782	1A2B
1729	2A1B

請問正確的答案為何？

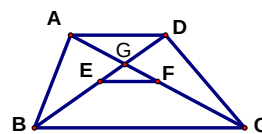
(A) 1829 (B) 1927 (C) 1928 (D) 9271

5. 請問， $17^{108} - 3$ 的個位數字是多少？

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

6. 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， E, F 分別是對角線 $\overline{BD}$ 及 $\overline{AC}$ 之中點，且 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 G 點。若 $\overline{AD} = 6, \overline{BC} = 18$ ，則 $\frac{\triangle GEF}{\triangle GBC}$ 的比值為多少？

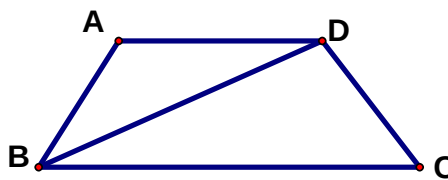
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{12}$



7. 已知梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$ ，且 $\angle C = 60^\circ$ ，如圖所示。

如果 $\overline{BC} = 4$ ，則 $\overline{AD} = ?$

- (A) 5 (B) 3 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 2

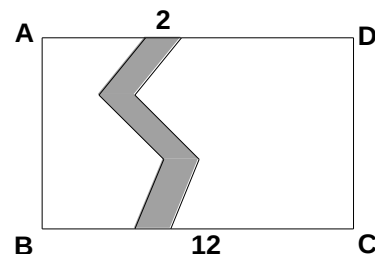


8. 請問，滿足條件 $n^{394} < 5^{591}$ 中最大正整數 n 是多少？

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

9. 如圖，一個長方形 $ABCD$ 的田地，其面積為 96 平方公尺，在這圖形中，有一條寬為 2 公尺的道路，如陰影部分。已知這塊田的長為 12 公尺，請問這條道路(圖中陰影部分)的面積是多少平方公尺？

- (A) 12 (B) 16 (C) 24 (D) 32



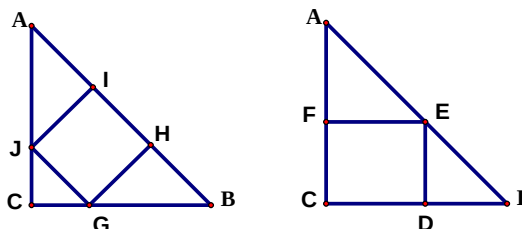
10. 有二個正整數 a, b 且 $a < b$ ，如果 $a \times b$ 正好是 $a + b$ 的倍數，我們就叫數對 (a, b) 為「好的數對」，例如：(10, 15) 是一個好的數對 (但 (15, 10) 不算)。那麼在 1, 2, 3, ..., 14 這 14 個數中所有滿足這樣條件的數對 (a, b) 共有幾組？

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

第二大題：

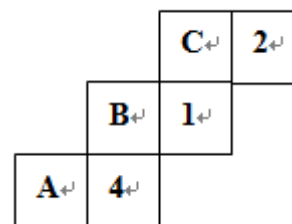
11. 在等腰直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，其內接正方形有二種排列，如圖所示。如果正方形 $CDEI$ 之面積為 441，則正方形 $GHIJ$ 之面積為下列何者？

- (A) 378 (B) 392 (C) 400 (D) 441



12. 下圖是一個正方體木塊的表面展開圖。若在正方體的每一面填上一個數字，使得對面兩數之和為 7，則 A 面處填的數字是多少？

- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6



13. 小明與小華手上各有 13 張紙牌，二人手上的每張牌上面都編有一個號碼，分別為 1, 2, 3, ..., 10。如果二人各取出一張牌來並計算這二張牌上所編號碼的乘積，可以得到許多不同的乘積，請問所有這些乘積的總和是多少？

- (A) 1260 (B) 1280 (C) 1320 (D) 1360

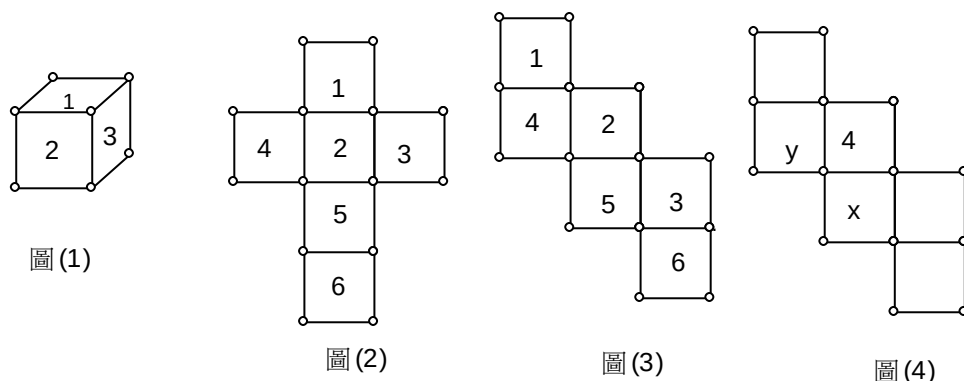
14. 已知 a, b 為相異的正整數，且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{3}$ ，則 $a + b$ 的值是多少？

- (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 16

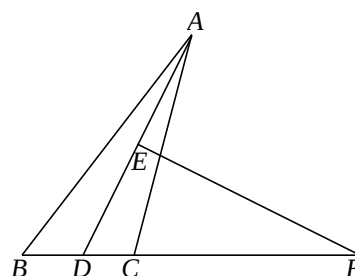
15. 甲、乙兩校原來各有學生若干名。若甲校的學生轉出 90 名學生到乙校，則新的乙校學生人數變為新的甲校學生人數的 2 倍；若原來從乙校轉出若干名學生到甲校，則新的甲校學生人數變為新的乙校學生人數的 6 倍，請問甲校原來的學生人數最少是多少名？

- (A) 146 (B) 153 (C) 167 (D) 181

16. 將 1, 2, 3, 4, 5, 6 分別填入正方體的每一面中（每面只填一個數字），如圖(1)所示；將這個正立方體展開，共有 11 個不同的圖，而圖(2)及(3)是其中的兩個圖。又圖(4)是另一個展開圖，其相應的數字如圖(4)所示（注意數字的方向），則 $x+y$ 的值為下列何者？
- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11



17. 如下圖， $\overline{AD}$ 是 $\angle BAC$ 的角平分線， $\overline{EF}$ 是 $\overline{AD}$ 的垂線平分線，若 $\overline{BC} : \overline{CF} = 1 : 2$ ，則 $\frac{\Delta ABD \text{面積}}{\Delta ABC \text{面積}}$ 的值是多少？



18. 有一個四位數 n 不是某整數的立方，如果 n 正好有四個相異正因數，且除了本身外其餘三個因數之和為 1000，則 n 的值是多少？
(A) 1994 (B) 1995 (C) 1996 (D) 1997
19. 已知 2^{2018} 乘開以後正好是 m 位數，且 5^{2018} 乘開以後正好是 n 位數，其中 m, n 都是正整數，則 $m+n$ 之值為多少？
(A) 2017 (B) 2018 (C) 2019 (D) 2020
20. 某媽祖廟為配合政府環保減香，每一位信眾持香由 8 炷香減為 3 炷香，祭拜完之後將香插入原來八個不同香爐中的三個；已知廟方規定每個香爐最多插一炷香，而且天公爐以及主爐至少有一個要插香，其他的香再任意插入剩下的香爐中。請問，在不考慮插香順序的情況之下，每一位信眾有多少種插香的方法？
(A) 20 (B) 28 (C) 34 (D) 36
21. 假設 x 、 y 都是大於 0 的數，且 $x^2 = 4 + \sqrt{15}$ 、 $y^2 = 4 - \sqrt{15}$ ；試求出 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的值是多少？
(A) $\sqrt{10}$ (B) 8 (C) $2\sqrt{15}$ (D) 15
22. 如圖，在一個長方形 ABCD 中有橫列 10 列直行 15 行共 150 格大小均相同的小正方形，在每一個正方形中，將 1、2、3、...、149、150 等共 150 個正整數依序由左而右填滿第一列、第二列一直到第十列；連接對角線 AC 線段；將此對角線所經過的小正方格中所有的整數相加之總和為 K，則 K 的值是多少？
(A) 1510 (B) 1610 (C) 1710 (D) 1810

A	1	2	3	4	5		15	D
	16	17	18	19	20		30	
	⋮						⋮	
B	136	137	138	139	140		150	C