

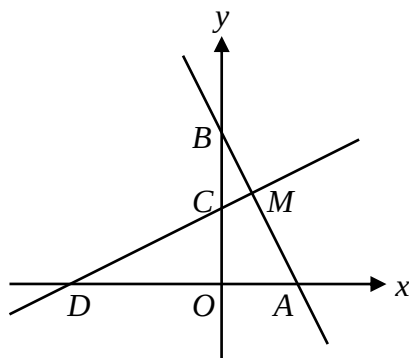
臺南市 108 年公私立國民中學數學競賽決賽試題

答題說明：

1. 試題所提供圖形僅供參考。
2. 本試卷單面印刷共有兩張，試題分為兩大題，第一大題為填充題共 10 題，每題 6 分，答案需全對才給分；第二大題為計算及證明題共 4 題，每題配分於題目後方，共 40 分。

第一大題：填充題

1. 已知一數列 $\{a_n\}$ 滿足下列條件： $a_1 = 2$ 且 $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ ，其中 n 為任意正整數，則 a_{2019} 的值為_____。
2. 已知 a 為實數，如果 $4^a - 4^{a-1} = 24$ ，則 $(2a)^{2a}$ 的值為_____。
3. 已知 a 為實數，如果二次方程式 $4x^2 - 4(a-1)x + a^2 - 7 = 0$ 的二根之差為 2，則 a 的值為_____。
4. 已知有 k 個數列，每個數列都是由連續正偶數所組成，且每個數列總和皆為 1000，則這 k 個數列的首項中最小的數為_____。
5. 設 n 為正整數，如果 n 加上 292 後為一個完全平方數(即為某一個整數的平方)，且 n 加上 200 後為另一個完全平方數，則 n 的值為_____。
6. 化簡 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{2020} - \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{2019} - \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{2018} - 8 \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)$ 的值為_____。
7. 已知四個線段的長度分別為 10 公分，15 公分，20 公分，35 公分，則以此四個線段所組成的所有梯形中，能圍出的最大面積為_____平方公分。
8. 假設聯立方程組 $\begin{cases} 4xy - 7\sqrt{xy+1} = 11 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ 的解為 $x = a$ ， $y = b$ ，則所有可能 $a + b$ 的值為_____。
9. 如下圖，直線 $y = -2x + 2$ 與 x 軸、 y 軸分別交於 A 、 B 兩點，將 $\triangle OAB$ 繞點 O 逆時針方向旋轉 90° 後得到 $\triangle OCD$ 。若直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 與直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 交於點 M ，則線段 $\overline{BM}$ 的長度為_____。

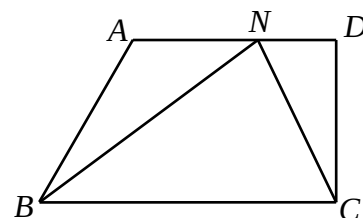


10. 已知 m ， n 均為正整數，且滿足 $m^2 - 4n$ 及 $n^2 - 4m$ 皆為完全平方數，則所有可能 $m + n$ 的值為_____。

第二大題：計算及證明題

1. 已知 a 、 b 、 c 、 d 、 e 為 5 個相異正整數，且 $a < b < c < d < e$ 。如果將這 5 個數兩兩相減後（大數減小數）可以得到 10 個相異正整數，試求 e 的最小可能值？並求在此情況下 a 、 b 、 c 、 d 的值為何？（8 分）

2. 如圖，滿足條件： $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{CD} \perp \overline{BC}$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\overline{AD} = 8$ ， $\overline{BC} = 12$ 的四邊形 $ABCD$ 中，點 N 是四邊形 $ABCD$ 邊 $\overline{AD}$ 上的任意一點，試求 $\triangle BNC$ 周長的最小值為何？（12 分）



3. 在平面直角坐標系中，點 O 為原點。已知直角 $\triangle AOB$ 中， $\angle AOB = 90^\circ$ ，兩股 $\overline{OA}$ 與 $\overline{OB}$ 分別在 y 軸和 x 軸正向上，並且 $\overline{OA}$ 與 $\overline{OB}$ 的長度分別是方程式 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的兩根，又 $\overline{OA} < \overline{OB}$ 。有一動點 P 從點 A 開始在線段 $\overline{OA}$ 上以每秒 1 個單位長的速度朝點 O 移動；同時另一動點 Q 從點 B 開始在線段 $\overline{AB}$ 上以每秒 2 個單位長的速度朝點 A 移動，經過 t 秒後得出 $\triangle APQ$ 與 $\triangle AOB$ 相似，試問此時 t 的值為何？（10 分）

4. 已知 p 為質數，如果方程式 $\frac{x^2 - 5x - 5}{3p^2 + p + 19} = 1$ 有正整數解，試問所有可能的 p 值為何？（10 分）